7. INTEGRALES DE SUPERFICIE

7.3. Integrales de campos vectoriales sobre superficies

Integral de un campo vectorial sobre una superficie

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$, y $F : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Se define la **integral de superficie** de F sobre S como:

$$\iint_S F\, d\sigma = \iint_D F\left(\Phi(u,v)\right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) du\, dv$$

Interpretación geométrica

La integral del campo vectorial F sobre la superficie S coincide con la integral de su componente normal o proyección sobre $\mathbf{n}$ (que es una función escalar) sobre S:

$$\iint_S F\, d\sigma = \iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

Ejemplo

Calcula la integral del campo vectorial $F(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sobre la esfera unidad (de radio unidad centrada en el origen).

Orientación de un superficie

Una **superficie orientada** es una superficie con dos caras en la que se especifica una de ellas como **cara exterior o positiva** y la otra como **cara interior o negativa**.

Puesto que en cada punto de la superficie hay dos vectores normales opuestos ($\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ con $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$), cada uno de ellos se asocia con una cara. Concretamente, cada cara se asocia con el vector que apunta hacia afuera sobre dicha cara.

Si $S \subset \mathbb{R}^3$ es la superficie parametrizada por $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se toma como orientación positiva de S la asociada al vector normal $\mathbf{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$.

Independencia de la parametrización

La integral de superficie de un campo vectorial sobre una superficie no depende de la parametrización elegida, siempre que esta conserve la orientación.

Si Φ_1 y Φ_2 son dos parametrizaciones de la misma superficie S que no conservan la orientación ($\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$), entonces las integrales asociadas a ellas son opuestas:

$$\iint_{S_{\Phi_1}} F\, d\sigma = \iint_S F \cdot \mathbf{n}_1\, d\sigma = -\iint_S F \cdot \mathbf{n}_2\, d\sigma = -\iint_{S_{\Phi_2}} F\, d\sigma$$

Ejemplo

Calcula la misma integral del ejemplo anterior considerando en la esfera la orientación hacia afuera (con el vector normal apuntando hacia el exterior de la esfera).

Interpretación física

Si F es el campo vectorial que indica la velocidad de un fluido en cada punto, la integral de superficie de F sobre la superficie S proporciona la cantidad neta de fluido que atraviesa la superficie (en el sentido positivo dado por el vector normal a S) por unidad de tiempo, lo que se conoce con el nombre de **flujo de F a través de S**.

Ejercicios

1. Calcula la integral de los siguientes campos vectoriales sobre las superficies que se indican:

(a) $F(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, sobre la superficie formada por la semiesfera $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$, y su base $x^2+y^2 \leq 1$, $z=0$.

(b) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$, sobre la parte del cono $z^2 = x^2+y^2$, $1 \leq z \leq 2$, con la normal apuntando hacia el eje z.

2. Sea $F(x,y,z) = (x, y, -y)$. Calcula $\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ donde:
(a) S es $x^2+y^2+z=4$, $0 \leq z \leq 4$, y $\mathbf{n}$ apunta hacia afuera.
(b) S es la superficie del cubo unidad $[0,1]^3$, y $\mathbf{n}$ apunta hacia adentro.

3. Halla el flujo del campo vectorial $F(x,y,z) = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ hacia el exterior de la esfera unidad.

4. Sea $F(x,y,z) = (1, x, z)$ el campo de velocidades de un fluido (medido en metros por segundo). ¿Cuántos metros cúbicos de fluido están cruzando la superficie $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$, en cada segundo?

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. **(a)** -2π; **(b)** $\frac{15\pi}{2}$.
2. **(a)** 16π; **(b)** -2.
3. $\frac{12\pi}{5}$.
4. $\frac{2\pi}{3}$ m^3/seg.